

به نام او

آزمون آزمایشی المپیاد ریاضی
۲۹ فروردین ماه ۱۳۹۳

سال دوم و سوم دبیرستان، زمان: چهار ساعت و نیم

پاسخ هر سوال را روی برگه‌ای جداگانه به همراه نام و نام خانوادگی بنویسید.
برگه‌ی فاقد ویژگی‌های فوق تصحیح نخواهد شد.

۱. کوچکترین n را بیابید که هر طور نقاط با مختصات $1, 2, \dots, n$ روی محور x ها را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنیم، همواره ۳ نقطه هم‌رنگ یافت شوند که یکی وسط دو تای دیگر باشد.

۲. a_1, a_2, \dots, a_{14} اعداد طبیعی متمایز هستند. آیا ممکن است که به ازای هر دو رقم a, b اندیس‌های i, j موجود باشند به نحوی که: $a_i + a_j \equiv \overline{ab} \pmod{100}$ ؟

۳. M وسط ارتفاع AD از مثلث قائم‌الزاویه ABC است. $(\angle A = 90^\circ)$ فرض کنید ω دایره‌ای به مرکز A و شعاع AD باشد. دایره به قطر BD ، خط BM و دایره ω را به ترتیب در نقاط S, Y قطع می‌کند. دایره به قطر CD ، خط CM و دایره ω را به ترتیب در نقاط R, X قطع می‌کند. ثابت کنید نقاط X, Y, R, S هم‌خطند.

۴. a, b, c, d اعداد حقیقی و مثبتند. ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} \geq \frac{4a+4b+4c-3d}{9}$$

دلا معاش چنان کن که گر بلغزد
پای،

فرشته‌ات به دو دست دعا نگه دارد