دومین المپیاد ریاضی همزمان

۱۷ تیر ۱۳۹۳ | زمان: ۴ ساعت و نیم

۱. فرض کنید $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی باشد. نشان دهید عدد صحیح یکتای $n \geq 1$ وجود دارد به طوری که:

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

۲. فرض کنید $n \geq 2$ عددی صحیح است. یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ شامل n^2 مربع واحد در نظر بگیرید. یک آرایش از n رخ در این صفحه را صلح‌آمیز می‌گوییم، اگر در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک رخ قرار داشته باشد. بزرگترین عدد طبیعی k را بیابید به صورتی که برای هر آرایش صلح‌آمیز n رخ، یک مربع $k \times k$ وجود داشته باشد که هیچ رخی در k^2 خانه‌ی آن نباشد.

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم: $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. نقطه‌ی H پای عمود وارد از A بر BD است. نقاط S و T به ترتیب روی اضلاع AB و AD قرار دارند، به طوری که H درون مثلث SCT قرار داشته باشد و

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ\,.$$

نشان دهید که خط BD بر دایره‌ی محیطی مثلث TSH مماس است.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

Tuesday, July 8, 2014

Problem 1. Let $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problem 2. Let $n \geq 2$ be an integer. Consider an $n \times n$ chessboard consisting of n^2 unit squares. A configuration of n rooks on this board is *peaceful* if every row and every column contains exactly one rook. Find the greatest positive integer k such that, for each peaceful configuration of n rooks, there is a $k \times k$ square which does not contain a rook on any of its k^2 unit squares.

Problem 3. Convex quadrilateral $ABCD$ has $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Point H is the foot of the perpendicular from A to BD. Points S and T lie on sides AB and AD, respectively, such that H lies inside triangle SCT and

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Prove that line BD is tangent to the circumcircle of triangle TSH.

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points